BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan tinjauan pustaka yang mendasari penelitian tugas akhir. Isi pada bab ini mencakup penjelasan penyakit tuberkulosis, model matematika penyakit tuberkulosis dalam bentuk $SITR$, kemudian analisis sistem yang meliputi titik kesetimbangan, analisis kestabilan dengan kestabilan nilai eigen dan Runge-Kutta orde empat. Adapun penjabaran mengenai penelitian terdahulu yang disajikan pada subbab terakhir dari subbab ini.

2.1 Tuberkulosis

Tuberkulosis atau TB adalah suatu penyakit infeksi yang disebabkan *Mycobacterium tuberculosis* yang menyerang sebagian paru-paru, tetapi dapat mengenai organ lainnya. Basil *Mycobacterium tuberculosis* dapat dilihat menggunakan mikroskop dengan ukuran yaitu 0.5-4 mikron x 0,3-0,6 mikron dan berbentuk batang. Sifat dari basil tersebut cukup istimewa, karena dapat bertahan terhadap perubahan warna dengan asam dan alkohol sehingga disebut dengan basil tahan asam (BTA). Selain itu basil ini juga tahan terhadap keadaan kering dan dingin, basil ini dapat bertahan pada kondisi lembab dan gelap selama berbulan bulan, namun basil ini dapat mati apabila terkena sinar matahari atau aliran udara (Widoyono, 2011).

Penyebaran penyakit tuberkulosis ditularkan melalui udara, percikan ludah atau dahak yang dikeluarkan penderita tuberkulosis menjadi media penularan yang sangat cepat. Penularan tuberkulosis melalui udara akan sangat rentan terjadi di ruang publik seperti mall, stasiun, dll. Kebersihan lingkungan dapat mempengaruhi penyebaran bakteri, misalnya rumah kurang baik dalam pengaturan ventilasi, kondisi lembab akibat kurang lancarnya pergantian udara dan sinar matahari dapat membantu berkembangbiaknya bakteri. Gejala awal tuberkulosis yaitu antara lain batuk sekitar dua minggu atau lebih, keluar keringat dingin setiap saat tanpa penyebab yang jelas, demam tidak terlalu tinggi, nafsu makan dan berat badan menurun (Kemenkes, 2018).

Salah satu upaya WHO untuk pengendalian penyakit tuberkulosis antara lain mengembangkan DOTS (*Directly Observed Treatment Short-course*), strategi DOTS terdiri atas 5 komponen penting yaitu komitmen politis dengan peningkatan dan kesinambungan pendanaan, penemuan kasus melalui pemeriksaan dahak mikroskopis yang terjamin mutunya, pengobatan yang standar, dengan supervisi dan dukungan bagi pasien, sistem pengelolaan dan ketersediaan OAT (Obat Anti Tuberkulosis) yang efektif, sistem monitoring pencatatan dan pelaporan yang mampu memberikan penilaian terhadap hasil pengobatan pasien dan kinerja program (WHO, 2014).

2.2 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah sebuah proses terdapat situasi dimana tidak dapat diperhitungkan semua aspeknya, sehingga ditentukan aspek yang paling penting yang kemudian diilustrasikan ke dalam istilah matematika. Kemudian diterapkan pengetahuan matematika seperti perkiraan, teorema. Model matematika tidak hanya digunakan dalam ilmu-ilmu rekayasa seperti kimia, fisika, biologi, melainkan juga dalam ilmu-ilmu sosial seperti ekonomi, psikologi, ilmu politik. Oleh karena itu, pemodelan matematika selalu dikaitkan dengan bidang-bidang keilmuan lainnya (Widowati and Sutimin, 2007).

Model matematika yang telah terbentuk akan dilakukan analisis dan simulasi numerik, agar model tersebut representatif terhadap masalah yang dibahas. Model matematika merupakan alat yang digunakan untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit menular. Model matematika yang paling populer untuk penyakit menular adalah model *SIR* (*Susceptible – Infect – Recovered*), model ini pertama kali diperkenalkan oleh Kermack and McKendrick pada tahun 1927. Seiring perkembangan jaman, model ini dimodifikasi sesuai sifat-sifat penyakit menular yang ada di masa kini. Banyaknya individu dalam kompartemen S, I, dan R dan pada saat t dinotasikan sebagai $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ (J. Li dan Z. Ma, 2009).

2.3 Model $SITR$

Model $SITR$ merupakan salah satu model penyebaran penyakit dengan membagi subpopulasi S sebagai *Susceptible*, I sebagai *Infective*, T sebagai *Treatment*, R sebagai *Recovered*. Pada model penyebaran $SITR$ merupakan pengembangan lebih lanjut dari model penyebaran SIR, pada model penyebaran *SIR* merupakan hanya mengasumsikan subpopulasi individu yang terinfeksi namun pada model penyebaran *SITR* mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi membutuhkan pengobatan untuk sembuh (Side, dkk, 2016).

Contoh model *SITR* yang berbentuk dari permasalahan penyebaran penyakit tuberkulosis di kota Makassar menurut Side dkk, (2016) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta\frac{I}{N}S - \mu S, \tag{2.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - aI - \mu I, \tag{2.2}$$

$$\frac{dT}{dt} = aI - (\gamma + \mu + \delta)T, \tag{2.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R. \tag{2.4}$$

(Side dkk, 2016)

2.4 Titik Kesetimbangan

Titik ketimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut.

$$x' = f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Suatu $\bar{x} \in \mathbb{R}$ disebut titik kesetimbangan pada persamaan (2.5) jika $f(\bar{x}) = 0$ (perko, 2001).

2.5 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan pada suatu sistem persamaan diferensial non linier dicari melalui pelinearan. Liniearisasi merupakan proses untuk membawa suatu sistem persamaan diferensial non linier ke dalam sistem persamaan diferensial linier.

Untuk mencari hasil dari pelinearan, maka digunakan matriks Jacobi dari persamaan diferensial non linier. Linierisasi terhadap sistem dapat dilakuka melalui ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}$ diperoleh matriks Jacobi (Rumlawang dan Nanlohy, 2011).

Definisi 2.1: Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$ dengan sistem $x' = f(x)$, dengan $f_i \in C(x), i = 1,2,3, \dots, n$ Berikut adalah matriks Jacobi yang terbentuk,

$$\mathrm{Jf}(\bar{\mathrm{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}) & \begin{matrix}\cdots \\ \ddots\end{matrix} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}, \qquad (2.6)$$

Matriks diatas dinamakan matriks Jacobi f di titik $\bar{x}$. Kemudian untuk mendapatkan persamaan karakteristik dari matriks Jacobi digunakan rumus $|\lambda I - Jf(\bar{x})| = 0$ dan perhitungan menggunakan aturan kofaktor ekspansi kolom dengan rumus sebagai berikut,

$$J_{11}\begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} - J_{21}\begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} + J_{31}\begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{vmatrix} - J_{41}\begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.7)$$

(Juliah, 2015).

Dalam menganalisis kestabilan sistem digunakan konsep kestabilan nilai eigen.

Teorema 2.1: Diberikan sebuah persamaan differensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah sebuah matriks $n \times n$ dengan nilai eigen berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $(k \leq n)$. Titik asal $x = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, \dots, k$. Titik asal stabil jika $\lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1, \dots, k$ dan bahkan jika untuk masing-masing nilai eigen $\lambda_i = 0$ ada korespondensi sebanyak bebas linier nilai eigen sebagai multiplikasi dari λ_i (Olsder, 2004).

2.6 Runge-Kutta Orde 4

Runge-Kutta merupakan salah satu metode numerik untuk mendekati solusi eksak dari suatu masalah persamaan diferensial biasa. Dipilih metode Runge-Kutta orde 4, karena orde yang lebih tinggi melibatkan penghitungan yang makin rumit dan tidak efisien. Runge-Kutta dapat ditulis

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n), \tag{2.8}$$

Berikut adalah bentuk umum dari Runge-Kutta Orde 4 sebagai berikut:

$$k_1 = hf(t_i, w_i), \tag{2.9}$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \tag{2.10}$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \tag{2.11}$$

$$k_4 = hf(t_i + 1, w_i + k_3), \tag{2.12}$$

Untuk setiap $i = 0,1, \dots, N - 1$. Dijabarkan dengan notasi $k_1,\ k_2, k_3,\ k_4$ (Burden, 2010).

2.7 Penelitian Terdahulu

Berikut adalah penelitian terdahulu yang menjadi referensi dalam pengerjaan penelitian ini.

Tabel 2.1 Penelitian Terdahulu

No	Nama dan Tahun Publikasi	Hasil
1.	Syafruddin Side, dkk (2016)	• Analisis model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis menghasilkan dua titik equilibrium yaitu titik equilibrium bebas penyakit dan titik equilibrium endemik penyakit yang stabil asimtotik.

		• Hasil simulasi diperoleh plot grafik untuk nilai parameter pertama menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara signifikan, berbeda dengan populasi individu *infective treatment* dan *recovered* terus menurun
2.	Suryani, dkk (2019)	• Model $SIRD$ penyebaran penyakit ebola dengan adanya pengaruh migrasi terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. • Hasil simulasi diperoleh plot grafik untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dimana pada variabel S naik secara signifikan menuju suatu titik dan kontinu di titik tersebut, artinya individu rentan akan semakin bertambah secara signifikan dan pada variabel IR menuju titik 0, artinya tidak individu yang terinfeksi dan sembuh. Sementara itu pada titik kesetimbangan endemik penyakit didapatkan bahwa variabel S akan naik dan menuju suatu titik sementara itu pada variabel IR didapatkan bahwa titik tersebut menuju suatu titik dan kontinu pada titik tersebut artinya individu terinfeksi dan sembuh akan selalu ada.

www.itk.ac.id