BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi landasan teori yang digunakan pada bab selanjutnya. Materi yang dibahas meliputi pembahasan tentang Stokastik, Rantai Markov dan Peluang Transisi.

2.1 Matriks

Matriks adalah persegi panjang atau array dua dimensi. Kita berbicara tentang baris dan kolom pada sebuah matriks. Baris atau kolom dapat dianggap sebagai vektor, dan kita sering menggunakan persamaan ini. Matriks n x m adalah suatu matriks yang berukuran n baris dan m kolom. Angka pada matriks dan angka pada kolom menentukan bentuk pada matriks. Perhatikan bahwa bentuknya adalah tople (n,m) bukan hanya satu angka seperti rasio. Jika angka pada baris sama seperti angka pada kolom, matriks dikatakan sebagai persegi. Ukuran matriks juga bisa dikatakan ordo.

Matriks n x m A dapat ditulis:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kita juga dapat menulis matriks A diatas sebagai

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} \tag{2.1}$$

Keterangan:

$A_{m\times n}$ = Matriks A mempunyai m baris dan n kolom.

a_{11} = Elemen matriks pada baris 1, kolom 1.

a_{12} = Elemen matriks pada baris 1, kolom 2.

$.a_{mn}$ = Elemen matriks pada baris m, kolom n.

a_{ij} = Entri yang terdapat pada baris *i* dan kolom *j* dari matriks A,

Dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n \,; j = 1, 2, 3, \dots, n$ (Gentle, 2010)

2.1.1 Penjumlahan Matriks

Operasi hitung matriks pada penjumlahan memiliki syarat yang harus dipenuhi agar dua buah matriks dapat dijumlahkan. Syarat dari dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan jika memiliki nilai ordo yang sama. Artinya, semua matriks yang dijumlahkan harus memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ keduanya adalah matriks berukuran $m \times n$, maka $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

2.1.2 Perkalian Matriks

Operasi hitung matriks pada perkalian memiliki syarat yang harus dipenuhi agar dua buah matriks dapat dikalikan. Syarat dua buah matriks dapat dikalikan jika memiliki jumlah kolom matriks pertama yang sama dengan jumlah baris matriks kedua. Ordo matriks hasil perkalian dua matriks adalah jumlah baris pertama dikali jumlah kolom kedua. Jika $A = [a_{ij}]$ matriks berukuran $m \times p$ dan $B = [b_{ij}]$ matriks berukuran $p \times n$, maka perkalian matriks $A \times B$ berlaku, apabila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris B.

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right] \tag{2.2}$$

Keterangan:

AB = Matriks A dikali Matriks B.

a_{ik} = Entri yang terdapat pada baris i dan kolom k dari matriks A.

b_{kj} = Entri yang terdapat pada baris k dan kolom j dari matriks B.

dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n \,; j = 1, 2, 3, \dots, n$(Aulia, 2018).

2.2 Peluang

2.2.1. Definisi Peluang

Peluang adalah kemungkinan terjadinya suatu peristiwa yang bersifat acak. Suatu peristiwa dikatakan acak jika terjadinya peristiwa yang tidak diketahui sebelumnya. Oleh karena itu, peluang dapat digunakan sebagai alat ukur terjadinya peristiwa di masa yang akan datang.

Nilai peluang yang paling kecil adalah 0 yang berarti bahwa peristiwa yang tidak mungkin terjadi. Sedangkan nilai peluang yang terbesar adalah 1 yang berarti bahwa peristiwa tersebut pasti akan terjadi.

Jika S mempunyai n anggota dan A sebuah peristiwa yang diturunkan dari S maka

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \tag{2.3}$$

dimana: $P(A)$ adalah peluang terjadinya peristiwa A, $n(A)$ adalah banyaknya peristiwa A dan $n(S)$ adalah banyaknya anggota (S. Syarifudin, 2014).

2.2.2 Peluang Bersyarat

Dua kejadian dikatakan mempunyai peluang bersyarat jika terjadi suatu kejadian merupakan persyaratan kejadian yang lain. Secara umum peluang kondisional A jika diketahui B didefinisikan sebagai berikut:

Apabila A dan B adalah kejadian-kejadian yang terdapat dalam ruang sampel dan peluang-peluang kejadian B tidak sama dengan nol, maka peluang kondisional A jika diketahui B telah terjadi sebelumnya adalah:

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0 \tag{2.4}$$

dimana $0 \leq P(A\backslash B) \leq 1$.

Keterangan:

$P(A\backslash B)$ = Peluang bersyarat kejadian A jika kejadian B diketahui.

$P(A \cap B)$ = Peluang terjadinya A dan B sekaligus.

Ini hanya berlaku apabila $P(B) \neq 0$. Karena jika $P(A\backslash B)$ tidak terdefinisi untuk keadaan dimana kejadian A dan B adalah independen, maka dapat dinyatakan:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A\backslash B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.5}$$

(Aulia, 2018).

2.3 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah suatu barisan kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang. Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang memuat suatu ketidakpastian atau sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tidak dapat diduga, dimana model *deterministic* tidak lagi cocok untuk menganalisis sistem.

Proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ didefinisikan sebagai suatu barisan peubah acak, yaitu untuk setiap $t \in T$ terdapat peubah acak $X(t)$. Indeks t diinterpretasikan sebagai waktu, karena proses stokastik terjadi pada selang waktu. Nilai peubah acak $X(t)$ dinamakan *state* pada saat t. Himpunan T disebut ruang parameter atau ruang indeks dari proses stokastik X dan himpunan semua nilai $X(t)$ (Aulia, 2018).

2.4 Proses Stokastik Waktu Diskrit

Sebuah sistem berkembang secara acak pada waktu $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Misalkan X_n adalah keadaan sistem (acak) pada waktu *n*. Urutan variable acak $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ disebut proses stokastik (waktu diskrit) dan ditulis sebagai $\{X_n, n \in \mathbb{Z} \geq 0\}$. Misalkan S adalah himpunan nilai dimana X_n untuk setiap waktu n. Sehingga S dikatakan ruang keadaan (*state space*) dari proses stokastik $\{X_n, n \in \mathbb{Z} \geq 0\}$ (Kulkarni, V G, 2011).

2.5 Rantai Markov

Proses Markov adalah suatu proses stokastik dengan sifat jika keadaan untuk state sekarang diketahui, peluang kejadian dari proses di satu langkah ke depan hanya dipengaruhi oleh langkah proses di saat sekarang. Artinya, keadaan proses di waktu-waktu lampau tidak mempengaruhi keadaan ke depan (Langi, 2011)

Proses stokastik $\{X_n, n \geq 0\}$ atas ruang *state S* disebut Rantai Markov Waktu Diskrit jika untuk setiap *i* dan *j* di S,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (2.6)$$

Dan Rantai Markov Waktu Diskrit dikatakan homogen waktu jika, untuk setiap $n = 0,1,$

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i) \tag{2.7}$$

$P(X_{n+1} = j|X_n) = i$ disebut peluang transisi satu-langkah dari rantai markov waktu diskrit pada waktu n. Untuk notasi yang lebih pendek adalah $P_{ij} = P(X_{n+1} = j\ |X_n = i\ ), i, j = 1,2, \ldots, N$ (Azka, 2017).

2.6 Peluang Transisi

Peluang transisi P_{ij} yang berupa peluang perpindahan suatu proses dari *state* S_i ke *state* S_j diberikan untuk setiap pasang *state*. Himpunan peluang atau fungsi hasil menggambarkan proses perpindahan tersebut yang melalui beberapa tahap. Agar lebih mudah dalam perhitungan dan perlambangan, secara sederhana peluang transisi ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks transisi **P**.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \ldots & P_{0N} \\ P_{01} & P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \ldots & P_{NN} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.8}$$

Di mana $\sum_{j=1}^{N} P_{i,j} = 1$ dan $p_{ij} \geq\ 0$ untuk semua i dan j.

Karena unsur dari matriks ini harus tak *negative* dan jumlah unsur-unsur pada setiap baris adalah 1, maka setiap baris disebut vektor peluang dan matriks **P** hanya mengandung unsur-unsur positif, maka matriks transisi dikatakan sebagai matriks regular/biasa (Nur Aidi, 2008).

Berikut adalah contoh peluang transisi sederhana, misalkan terdapat 2 program studi misal program studi A dan B. Data pertama diperoleh bahwa 40% orang memilih program studi A. Data kedua mengatakan bahwa 15% dari yang memilih program studi A beralih ke B dan 5% dari yang memilih program studi B beralih ke A. Diasumsikan jumlah sampel tetap.

Keterangan:

A ke B = 15%

B ke A = 5%

A ke A = 85%

B ke B = 95%

Dari keterangan yang sudah diperoleh, dibuat matriks transisi didapatkan sebagai berikut:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

2.7 Matriks Peluang Transisi

Matriks transisi dari rantai Markov waktu diskrit $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ dengan *state space* dan peluang transisi $P_{i,j}$ dinotasikan dengan

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{pmatrix}$$

Teorema 1: Jika *statenya* berhingga, misalkan $P = (P_{i,j})$ merupakan matriks peluang transisi $N \times N$ dari DTMC (*Discrete Time Markov Chains*) $(X_n, N \geq 0)$ dengan ruang *state* $S = (1, 2, \dots, N)$ maka

1. $P_{i,j} \geq 0,$ $\quad 1 \leq i, j\ N$
2. $\sum_{j=1}^{N} P_{i,j} = 1$ $\quad 1 \leq i \leq N$

Bukti: *nonnegative* dari $P_{i,j}$ berikut merupakan peluang (bersyarat). Untuk membuktikan pernyataan kedua, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N} P_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} P\,(X_{n+1} = j |\, X_n = i\,)$$
$$= P(X_{n+1}\, S\,|X_n = i\,) \qquad (2.9)$$

Karena X_{n+1} diperoleh dari ruang *state* S, terlepas dari nilai X_n, itu berarti hasil akhirnya adalah 1. Oleh sebab itu teorema terbukti (Kulkarni, V.G., 2011).

2.8 Persamaan Chapman-Kolmogorov

Persamaan Chapman-Kolmogorov menyediakan metode untuk menghitung peluang transisi n-langkah

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^{N} P_{\mathrm{ik}}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = j|X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+m} = j|X_n = k, X_0 = i)P(X_n = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X_{n+m} = j|X_n = k)P(X_n = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X_m = j|X_n = k)P(X_n = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X_n = k|X_0 = i)P(X_n = j|X_0 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P_{\mathrm{ik}}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \end{aligned}$$

Untuk semua $i = 1, 2, \dots, N$ $\quad j = 1, 2, \dots, N$

Dan setiap $m = 1, 2, \dots, n - 1$

$n = m + 1, m + 2, \dots$

Persamaan ini menjelaskan bahwa berangkat dari *state* i ke *state* j dalam n-langkah, prosesnya berada di *state* k setelah tepat m-langkah, sehingga $P_{ik}^{n}P_{kj}^{m}$ hanya peluang bersyarat yang diberikan titik awal *state* i, prosesnya menuju ke *state* k setelah m langkah dan kemudian menuju *state* j dalam $n + m$ langkah. Oleh karena itu, menjumlahkan peluang bersyarat ini untuk semua kemungkinan k harus menghasilkan $P_{ij}^{(n+m)}$. Untuk mendapat peluang n-langkah dapat dilakukan dengan mengalikan matriks satu-langkah dengan matriks itu sendiri, contohnya

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

Dengan demikian, matriks peluang transisi n-langkah P^N dapat diperoleh dengan menghitung pangkat ke-n dari matriks transisi satu-langkah P (Kulkarni V.G., 2011).

2.9 Penelitian Terdahulu

Berikut adalah rangkuman hasil penelitian terdahulu yang memiliki keterkaitan dengan penelitian yang telah dilakukan.

Tabel 2.1 Penelitian Terdahulu

No	Nama dan Tahun Publikasi	Hasil
1	Nurjana Sitty dkk. (2016).	Metode : Rantai Markov Peluang Transisi. Hasil : Dari hasil prediksi yang dilakukan terhadap 2 sekolah didapatkan persentase perpindahan peminatan dari setiap perguruan tinggi
2	Azka Muhammad (2017).	Metode : Rantai Markov Waktu Diskrit Hasil : Berdasarkan matriks peluang transisi dan diagram transisi yang diperoleh, data bias dimanfaatkan untuk memprediksi berapa besar peluang kategori hari hujan di bulan selanjutnya, jika diketahui kategori hari hujan untuk bulan sekarang.
3	Masuku Fatimah N. (2018).	Metode : Rantai Markov Peluang Transisi Hasil : Prediksi peluang perpindahan konsumen maskapai penerbangan yang menunjukan persentase perpindahan pada setiap maskapai