BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, dibahas mengenai landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Isi bab ini mencakup penjelasan mengenai pengangguran, model pengangguran, analisis sistem yang meliputi pencarian titik kesetimbangan dan analisis kestabilan. Kemudian dibahas mengenai kontrol optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge Kutta orde 4, dan penelitian terdahulu.

2.1. Pengangguran

Pengangguran adalah kondisi seseorang yang sedang berusaha aktif mencari pekerjaan dalam jangka waktu tertentu, seperti selama seminggu, sebulan, atau satuan lainnya. Seseorang yang tidak mempunyai pekerjaan dan tidak aktif untuk mencari pekerjaan, tetapi bersedia bekerja apabila diberi pekerjaan bisa disebut sebagai pengangguran (Probosiwi, 2016). Pengangguran merupakan salah satu tolak ukur sosial ekonomi dalam menilai keberhasilan pembangunan yang dilakukan pemerintah di suatu daerah. Masalah-masalah sosial yang bersifat negatif disebabkan oleh meningkatnya jumlah pengangguran (Imsar, 2018).

Pengangguran dapat dibedakan menjadi tiga macam yaitu, pengangguran terbuka, pengangguran terselubung dan setengah menganggur. Pengangguran terbuka, yaitu tenaga kerja yang tidak mempunyai pekerjaan. Pengangguran jenis ini cukup banyak karena memang belum mendapatkan pekerjaan padahal sudah berusaha secara maksimal untuk mencari pekerjaan. Pengangguran terselubung, yaitu tenaga kerja yang tidak bekerja secara optimal karena suatu alasan tertentu. Pengangguran terselubung bisa juga terjadi karena seseorang yang bekerja tidak sesuai dengan bakat dan kemampuannya, akhirnya bekerja tidak optimal. Setengah menganggur, yaitu tenaga kerja yang tidak bekerja secara optimal karena tidak ada pekerjaan untuk sementara waktu. Ada yang mengatakan bahwa tenaga kerja setangah menganggur ini adalah tenaga kerja yang bekerja kurang dari 35 jam dalam seminggu atau kurang dari tujuh jam sehari (Probosiwi, 2016).

2.2. Model Pengangguran

Model dinamik pengangguran menurut Munoli dan Gani (2015) sebagaimana tertulis di bawah ini:

$$\frac{dU}{dt} = \Lambda - (1 - u_1)kUV - \alpha_1 U + \gamma E, \tag{2.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - u_1)kUV - \alpha_2 E - \gamma E, \tag{2.2}$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha_2 E + \gamma E - \delta V + u_2 \phi U, \tag{2.3}$$

Keterangan:

U	=	Jumlah pengangguran,
E	=	Jumlah pekerja,
V	=	Jumlah lowongan,
Λ	=	Tingkat konstan penambahan jumlah pengangguran,
k	=	Tingkat pengangguran menjadi pekerja,
α_1	=	Tingkat migrasi dan juga kematian pengangguran,
α_2	=	Tingkat pensiun dan juga kematian pekerja,
γ	=	Tingkat seseorang yang dipecat dari pekerjaan mereka,
ϕ	=	Tingkat pembuatan lowongan baru,
δ	=	Tingkat pengurangan lowongan karena kurangnya dana,
u_1	=	Kontrol yang merepresentasikan penyediaan pekerjaan bagi pengangguran,
u_2	=	Kontrol yang merepresentasikan pembukaan lowongan pekerjaan baru.

Tipe kondisi batas transversalitas pada penelitian Munoli dan Gani (2015), yaitu *Fixed-final time and free-final state system*, dengan kondisi awal $U(0) = U_0, E(0) = E_0, V(0) = V_0$. Variabel U_0, E_0, V_0 menunjukkan keadaan awal saat $t = 0$ dan pada waktu akhir $\lambda_U(t_f) = \lambda_E(t_f) = \lambda_V(t_f) = 0$, dengan $\lambda_U, \lambda_E, \lambda_V$ menunjukkan variabel *adjoint* terikat oleh variabel U, E, V atau variabel *co-state* untuk U, E, V.

Fungsi objektif (J) pada penelitian Munoli dan Gani (2015) didefinisikan sebagai berikut.:

$$J(u_1(t), u_2(t)) = \int_0^{t_f} \left[AU(t) + \frac{B}{2} u_1^2(t) + \frac{C}{2} u_2^2(t) \right] dt.$$

Pada Persamaan (2.4), t_f adalah waktu akhir dan koefisien A, B, dan C adalah faktor biaya penyeimbang dari biaya pengontrolan sistem.

(Munoli and Gani, 2015).

Setelah mengetahui model pengangguran, selanjutnya dibahas mengenai analisis sistem, yang memuat pencarian titik kesetimbangan, linierisasi dan analisis kestabilan dengan kriteria Routh-Hurwitz.

2.3. Analisis Sistem

Analisis dinamik model dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem pada model. Pada penelitian ini dianalisis mengenai kestabilan sistem, dengan menentukan titik kesetimbangan terlebih dahulu kemudian matriks jacobian yang digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinier.

2.3.1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu.

Definisi 2.1 Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 2001).

2.3.2. Linierisasi

Linierisasi merupakan proses membawa suatu sistem nonlinier menjadi sistem linier. Linierisasi dilakukan untuk menentukan perilaku solusi di persekitaran titik kesetimbangan (Rumlawang dan Nanlohy, 2011).

Definisi 2.2 Sistem $\frac{dx}{dt} = J\big(f(\bar{x})\big)x$ disebut linierisasi di $\bar{x}$.

Linierisasi terhadap sistem dapat dilakukan melalui ekspansi Taylor di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}$ dan diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

matriks jacobian J dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinier di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}$. Perilaku dinamik untuk sistem dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks J pada Persamaan (2.4), yaitu

$$|\lambda I - J| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & \lambda - \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

(Rumlawang dan Nanlohy, 2011).

2.3.3. Analisis Kestabilan

Model pada penelitian ini bersifat nonlinier, sehingga untuk melakukan analisis kestabilan adalah dengan menggunakan cara menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbangnya. Analisis transformasi kestabilan lokal dilakukan dengan mencari suatu hampiran di sekitar titik setimbangnya terlebih dahulu.

Definisi 2.3 Diberikan persamaan diferensial tingkat satu $\dot{x}(t) = f(x(t))$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$, penyelesaian dengan keadaan awal $x(0) = x_0$ dinotasikan oleh $x(t, x_0)$.

1. Vektor x yang memenuhi $f(x) = 0$ disebut suatu titik setimbang.
2. Suatu titik setimbang x dikatakan stabil bila untuk setiap $\epsilon > 0$ ada $\delta > 0$ dan t_δ sedemikian hingga bila $\|x_{t_\delta} - x\| < \delta$ maka $\|x(t; x_{t_\delta}) - x\| < \epsilon$ untuk semua $t > t_\delta$.
3. Suatu titik setimbang x dikatakan stabil asimtotik bila titik tersebut stabil dan bila ada $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga

   $$\lim_{t\to\infty} \|x(t; x_{t_\delta}) - x\| = 0 \text{ bila } \|x_{t_\delta} - x\| < \delta_1$$

   Suatu titik setimbang dikatakan tak stabil bila titik tersebut tidak stabil.

Teorema 2.1 Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k (k \le n)$.

1. Titik asal $x = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.
2. Titik asal $x = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \le 0$ untuk $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ multisiplisistas aljabar sama dengan multiplisistas geometrinya.
3. Titik asal $x = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ multisiplisistas aljabar lebih besar dari multiplisistas geometrinya (Subiono, 2013).

2.3.4. Aturan Descart's

Aturan tanda Descart's digunakan untuk menganalisa jumlah akar-akar persamaan sistem. Jika sistem adalah orde ke-n, maka persamaan karakteristiknya dapat ditulis dalam bentuk umum

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (2.5)$$

dengan koefisien $a_i = 0,1,\ldots,n$ bernilai real. Diasumsikan $a_n \neq 0$, sebab jika tidak demikian, maka $\lambda = 0$ merupakan solusi. Misalkan N adalah banyaknya perubahan tanda pada barisan koefisien $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0\}$, dengan mengabaikan semua yang bernilai nol. Aturan tanda Descart's menyatakan bahwa terdapat paling banyak N buah akar dari Persamaan (2.5) yang bernilai real dan positif, serta terdapat $N, N-2, N-4, \ldots$ akar real positif. Kemudian dengan memisalkan $\omega = -\lambda$ dan menerapkannya kembali pada aturan, maka akan diperoleh informasi mengenai akar real negatif yang memungkinkan (Murray, 2003).

Jika jumlah perkiraan akar-akar real telah diketahui, maka langkah selanjutnya adalah menganalisis kestabilannya. Jika terdapat kasus dengan akar real dari suatu persamaan sistem sulit diketahui, maka untuk melakukan analisis kestabilannya bisa menggunakan metode Routh-Hurwitz.

2.3.5. Routh Hurwitz

Jika A adalah matriks $n \times n$, untuk nilai akar-akar s, persamaan $\det(sI - A) = 0$, dengan I adalah matriks identitas, dapat diturunkan menjadi persamaan polinomial orde ke-n. Persamaan polinomial ini disebut persamaan karakteristik dan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$p(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \qquad (2.6)$$

dengan $a_n = 1$. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk menyelidiki kestabilan melalui koefisien a_i tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada, yaitu dengan membentukan tabel dan menerapkan aturan perhitungan dari koefisien a_i sedemikian hingga diketahui bahwa polinomial yang diberikan oleh Persamaan (2.6) semua akar-akar bagian realnya adalah negatif.

Diberikan suatu polinomial

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, a_n \neq 0,$$

dan dibentuk suatu tabel, seperti yang ditunjukkan oleh

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ s^0 & q & & & \end{array}$$

dengan $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ dan q secara rekursif didapat dari (Subiono, 2013)

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \quad \dots.$$

Setelah analisis sistem dilakukan pemberian kontrol optimal pada sistem, tujuan untuk mengoptimalkan suatu fungsi linier maupun nonlinier yang terbatas oleh kendala yang berupa persamaan atau pertidaksamaan.

2.4. Kontrol Optimal

Tujuan utama dari kontrol optimal adalah untuk menentukan kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa *constraint*, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J).

Adapun masalah formulasi kendali optimal terdiri dari:

a. Mendeskripsikan secara matematis suatu model (secara umum dalam bentuk variabel *state*)

b. Menentukan fungsi objektif (*performance index*)

c. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi

Pada umumnya, masalah kontrol optimal dalam bentuk matematika dapat diformulasikan sebagai berikut, dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan (Naidu, 2002). Fungsi tujuan didefinisikan sebagai

$$J = S\left(\boldsymbol{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} V(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt, \tag{2.7}$$

dengan sistem dinamik yang dinyatakan oleh

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \tag{2.8}$$

dan kondisi batas

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ dan } \boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f. \tag{2.9}$$

Perlu diketahui masalah kontrol optimal dapat diselesaikan dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

2.5. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal, karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal. Prinsip ini digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan meminimumkan fungsi tujuan, dengan kendala dan diberikan fungsi kontrol $u(t)$. Pada permasalahan kendali optimal (u^*) didefinisikan sebagai kondisi optimal suatu variabel kendali u.

Langkah-langkah penyelesaian dari masalah kendali optimal yang diformulasikan oleh Persamaan (2.7) – (2.9) adalah sebagai berikut:

1. Bentuk Hamiltonian

   Bentuk umum persamaan H disebut fungsi Hamiltonian dengan V adalah bentuk Lagrange dan $\boldsymbol{\lambda}'$ adalah variabel *co-state* yang ditranspose serta f merupakan sebuah fungsi dari sebuah variabel $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{u}(t)$.

   $$H(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t) = V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t) + \lambda'(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t), \quad (2.10)$$

2. Minimumkan H terhadap $\boldsymbol{u}(t)$

   Fungsi H pada Persamaan (2.10), diminimumkan terhadap kontrol $\boldsymbol{u}(t)$, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

   $$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right)_* = 0,$$

   sehingga diperoleh kondisi stasioner

   $$\boldsymbol{u}^*(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t),t),$$

3. Menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2 akan didapatkan fungsi Hamiltonian yang optimal, H^*

   $$H^*(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*(t),\lambda^*(t),t),\boldsymbol{\lambda}^*(t),t) = H^*(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t),t), \quad (2.11)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dengan cara

   $$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*,$$

   dan persamaan *costate*, yaitu

   $$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_*,$$

dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}_0$ dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t)\right]_{t_f}^{\prime} \delta \boldsymbol{x}_{f,} \tag{2.12}$$

5. Substitusi solusi pada $\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam persamaan $\boldsymbol{u}^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kontrol yang optimal (Naidu, 2002).

Penyelesaian kontrol optimal secara numerik diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4, untuk variabel *state* menggunakan metode *Forward Sweep* Runge Kutta Orde 4 sedangkan untuk variabel *costate* menggunakan metode *Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4.

2.6. Metode Runge Kutta Orde 4

Metode Runge Kutta adalah metode alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode Runge-Kutta dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal. Jika diberikan permasalahan nilai awal,

$$\dot{y} = f(t, y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha. \tag{2.13}$$

Berdasarkan permasalahan nilai awal tersebut dapat dicari penyelesaiannya dengan rumus berikut,

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf(t, w_i), \\ k_2 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(t + h, w_i + k_3), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

untuk setiap $i = 0,1, \dots, N-1$ (Burden and Faires, 2011).

2.6.1. *Forward Sweep* Runge Kutta Orde 4

Metode *Forward Sweep* Runge-Kutta Orde 4 digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya. *Forward Sweep* Runge-Kutta Orde 4 dapat dituliskan

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2.14}$$

dengan

$$k_1 = f(t, x(t), u(t)),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t + h, x(t) + hk_3),$$

(Lenhart and Workman, 2007).

2.6.2. *Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4

Metode *Backward Sweep* Runge-Kutta Orde 4 digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai akhirnya. *Backward Sweep* Runge-Kutta Orde 4 dapat dituliskan

$$\sigma(t-h) \approx \sigma(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (2.15)$$

dengan

$$k_1 = f(t, \sigma(t), u(t)),$$

$$k_2 = f\left(t - \frac{h}{2}, \sigma(t) - \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t - \frac{h}{2}, \sigma(t) - \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t - h, \sigma(t) - hk_3),$$

(Lenhart and Workman, 2007).

2.7. Penelitian Terdahulu

Berikut adalah rangkuman hasil penelitian terdahulu yang memiliki keterkaitan dengan penelitian yang telah dilakukan.

Tabel 2.1 Penelitian terdahulu

No	Nama dan Tahun Publikasi	Hasil
1	Munoli, S.B dan Shankrevva G., 2015	Metode : *Pontryagin Maximum Principle* Hasil : Pemberian kontrol optimal kebijakan pemerintah untuk menciptakan lowongan baru memiliki dampak yang signifikan dalam mengurangi pengangguran.

No	Nama dan Tahun Publikasi	Hasil
2	Sundar dkk, 2018	Metode : *Stability theory of ordinary differential equation.* Hasil : Kenaikan pengangguran menyebabkan kejahatan yang mengarahkan peningkatan beban di penjara.
3	Samsir dkk, 2018	Metode : Prinsip Minimum Pontryagin Hasil : Menunjukkan keefektifan dari kedua jenis kontrol saat diterapkan sekaligus dalam mengurangi jumlah pengangguran.