BAB II

www.itk.ac.id

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang digunakan sebagai acuan teori dan penunjang dalam menyelesaikan permasalahan Tugas Akhir. Pertama-tama, ditunjukkan definisi ruang metrik beserta barisan-barisan yang ada didalam ruang tersebut. Hal ini dikarenakan, ruang metrik merupakan konsep dasar dalam pengembangan objek penelitian ini.

2.1 Ruang Metrik

Ruang metrik *cone* merupakan perluasan dari ruang metrik. Oleh karena itu, terlebih dahulu dijelaskan mengenai ruang metrik. Pada sub bab ini dijelaskan mengenai definisi dan sifat-sifat dari ruang metrik beserta contohnya. Definisi dari ruang metrik ini digunakan dalam mengkonstruksi ruang metrik *cone*.

Sebelum diberikan definisi dari ruang metrik, terlebih dahulu diberikan pengertian mengenai konsep ruang. Ruang adalah sejenis struktur, seringkali ruang adalah suatu himpunan (titik ruang) dengan beberapa sifat relasional. Sedangkan, konsep dari ruang metrik adalah memperjelas konsep jarak. Definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan real $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangkan metrik $d(x,y) = |x - y|$ dengan setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$. Sehingga $\mathbb{R}$ mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dengan jarak $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$. Definisi dari ruang metrik ditunjukkan pada Definisi 2.1.1.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dikatakan metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

i. $d(x,y) \geq 0$,

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

www.itk.ac.id

iii. $d(x,y) = d(y,x)$,

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (ketaksamaan segitiga).

Selanjutnya pasangan (X,d) disebut ruang metrik (Kreyszig, 1978).

Salah satu contoh ruang metrik yang sering digunakan adalah himpunan bilangan real dengan metrik d yang didefinisikan sebagai $d = |x - y|$.

Contoh 2.1.1

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik, sebab

i. Terbukti bahwa $d(x,y) = |x - y| \geq 0$.

ii. Terbukti bahwa $d(x,y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

($\Rightarrow$) Ditunjukkan bahwa $d(x,y) = 0$, maka $x = y$.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y|, \\ 0 &= |x-y|, \\ 0 &= x-y \\ x &= y \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ditunjukkan bahwa $x = y$, maka $d(x,y) = 0$.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y|, \\ &= |x-x|, \\ d(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

iii. Terbukti bahwa $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |-(y-x)| \\ &= |y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

iv. Terbukti bahwa $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\begin{aligned} d(x,y) = |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik. ■

Teorema titik tetap hanya dapat diterapkan pada ruang yang lengkap. Sehingga, perlu diberikan beberapa definisi untuk menyelidiki kelengkapan ruang

www.itk.ac.id

metrik. Suatu ruang dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen ke suatu nilai. Oleh karena itu, terlebih dahulu dijelaskan definisi barisan yang konvergen.

Definisi 2.1.2

Barisan (x_n) di ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan konvergen jika ada $x \in X$, maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Notasi x disebut limit dari (x_n), yang kemudian dapat juga ditulis dengan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

atau

$$x_n \to x.$$

Barisan (x_n) yang tidak konvergen disebut divergen (Kreyszig, 1978).

Selanjutnya, diberikan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik.

Definisi 2.1.3

Barisan (x_n) di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku (Ghozali, 2010),

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Adapun kelengkapan ruang metrik dinyatakan seperti pada Definisi 2.1.4.

Definisi 2.1.4

Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di dalam X (Bartle dan Sherbert, 2000).

2.2 Ruang Norm

Setelah dibahas mengenai ruang metrik, kemudian dibahas mengenai ruang yang berkaitan dengan ruang metrik yaitu ruang norm. Ruang metrik dapat dibangun oleh ruang norm atau dengan kata lain norm yang mendefinisikan metrik. Pada sub bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh yang berkaitan dengan ruang norm. Definisi dan sifat dari ruang norm digunakan dalam mengkonstruksi ruang metrik *cone*. Ketika menentukan *cone* untuk mengkonstruksi ruang metrik *cone*, diperlukan kodomain berupa suatu ruang

www.itk.ac.id

Banach real. Ruang Banach real merupakan ruang norm yang lengkap. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi mengenai ruang norm dan ruang norm yang lengkap.

www.itk.ac.id

Definisi 2.2.1

Misalkan X suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Norm pada X didefinisikan sebagai fungsi yang dinotasikan oleh $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, untuk semua $x \in X$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$.

Selanjutnya pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm (Muhtar, 2010).

Definisi 2.2.2

Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm.

1. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$
2. Barisan (x_n) di X dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku
$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Jika setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen maka X dapat dikatakan lengkap (Muhtar, 2010).

Definisi 2.2.3

Setiap ruang norm yang lengkap disebut ruang Banach (Cohen, 2003).

Beberapa contoh-contoh dari ruang norm yang lengkap adalah ruang-ruang $\mathbb{R}^n, \ell^\infty, \ell^p$, dan lain sebagainya. Berikut diberikan salah satu contoh norm yaitu ruang $\mathbb{R}^n$.

Contoh 2.2.1

Misalkan $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ dan didefinisikan fungsi
$$\|\cdot\| : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R},$$
dengan $\|x\| = (\sum_1^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. Dibuktikan bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi sifat pada norm.

Bukti.

i. Jelas bahwa penjumlahan suatu bilangan kuadrat akan lebih atau sama dengan 0. Sehingga terbukti bahwa $\|x\| = (\sum_1^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

www.itk.ac.id

Selanjutnya,

(⇒) Ditunjukkan bahwa $\|x\| = 0$, maka $x = 0$.

Andaikan $\|x\| = \left(\sum_{1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$, maka $x_i = 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

(⇐) Ditunjukkan bahwa $x = 0$, maka $\|x\| = 0$.

Andaikan $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, maka

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(\sum_{1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{1}^{n} |0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii. Untuk sebarang skalar $c \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} \|cx\| &= \left(\sum_{1}^{n} |cx_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{1}^{n} |c|^2 |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|c|^2 \sum_{1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |c| \left(\sum_{1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |c| \|x\|. \end{aligned}$$

iii. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan sebagai

$$\|x\| = \left(\sum_{1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y\| = \left(\sum_{1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sedemikian hingga,

www.itk.ac.id

$$
\begin{aligned}
\|x+y\| &= \left(\sum_{1}^{n}|x_i+y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{1}^{n}(|x_i|^2+|y_i|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{1}^{n}(|x_i|^2)+\sum_{1}^{n}(|y_i|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|+\|y\|
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa fungsi $\|\cdot\|$ suatu norm. ∎

2.3 Himpunan Terurut Parsial

Pada sub bab ini, diberikan definisi mengenai himpunan terurut parsial, tetapi terlebih dahulu diberikan definisi mengenai himpunan. Himpunan, menurut Walpole (2010) merupakan kumpulan benda atau obyek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Benda atau obyek dalam himpunan disebut elemen (unsur) atau anggota himpunan. Notasi himpunan dilambangkan dengan huruf kapital (A, B, dan lain sebagainya). Benda atau obyek yang termasuk dalam himpunan tersebut ditulis di antara kurung kurawal "{ }". Anggota suatu himpunan dinotasikan dengan $\in$, sedangkan yang bukan anggota dinotasikan dengan $\notin$.

Definisi dari relasi terurut parsial digunakan dalam mengkonstruksi ruang metrik *cone*. Ketika mengkonstruksi ruang metrik *cone*, diperlukan sifat *cone* yang kemudian dapat diterapkan relasi terurut parsial. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi mengenai relasi terurut parsial.

Definisi 2.3.1

Relasi $\preccurlyeq$ disebut relasi urutan parsial pada himpunan tak kosong P jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

Jika $a, b, c \in P$, maka:

i. $a \preccurlyeq a$ (sifat refleksif),

ii. jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq a$ maka $a = b$ (sifat antisimetri),

www.itk.ac.id

iii. jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $a \preccurlyeq c$ (sifat transitif).

www.itk.ac.id

Biasanya relasi pada himpunan terurut parsial (poset) dinotasikan dengan "$\preccurlyeq$". Hal ini berarti $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow (a, b) \in \preccurlyeq$ dan a dikatakan lebih kecil atau sama dengan b, atau b dikatakan lebih besar atau sama dengan a. $(P, \preccurlyeq)$ disebut himpunan terurut parsial (Rahmawati, 2016).

2.4 *Cone*

Relasi terurut parsial selanjutnya dapat diterapkan pada *cone*. Mula-mula, diberikan definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan *cone*. Definisi dari *cone* ini digunakan dalam mengkonstruksi ruang metrik *cone*.

Definisi 2.4.1

Diberikan E ruang Banach real dan $P \subseteq E$. Himpunan P disebut *cone* jika dan hanya jika

i. P tertutup, $P \neq \emptyset$ dan $P \neq \{0\}$,

ii. $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$,

iii. $x \in P$ dan $(-x) \in P \Rightarrow x = 0$.

Berikutnya, jika $P \subseteq E$ *cone*, maka dapat didefinisikan relasi urutan parsial "$\preccurlyeq$" terhadap P dengan $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$. Sedangkan notasi $x \prec y$ diartikan $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$. Notasi $x \ll y$ bermakna $y - x \in \operatorname{int} P$ (interior P) (Guang dan Xian, 2007).

Selanjutnya, diasumsikan bahwa E ruang Banach real, P *cone* dalam E dengan $\operatorname{int} P \neq \emptyset$ dan $\preccurlyeq$ adalah relasi urutan parsial terhadap P.

Definisi 2.4.2

Misalkan E ruang Banach, $P \subseteq E$, dan P *cone*. Himpunan P dikatakan normal jika dan hanya jika terdapat $K \in \mathbb{R}, K > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in E$ dengan $0_E \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ berakibat $\|x\| \leq K\|y\|$. Konstanta K terkecil yang memenuhi ketaksamaan tersebut disebut konstanta normal dari P (Guang dan Xian, 2007).

Lemma 2.4.1

Tidak ada normal *cone* yang mempunyai konstanta normal $K < 1$.

www.itk.ac.id

Bukti.

Andaikan P normal *cone* dengan konstanta normal $K < 1$. Ambil sebarang $x \in P$ dengan $x \neq \{0\}$ dan sebarang ε dengan $0 < \varepsilon < 1$ sehingga $K < 1 - \varepsilon$. Oleh karena itu jika $(1-\varepsilon)x \preccurlyeq x$ maka $(1-\varepsilon)\|x\| > K\|x\|$. Ini kontradiksi dari definisi normal *cone*. Jadi terbukti tidak ada normal *cone* yang mempunyai konstanta normal $K < 1$ (Rezapour dan Hamlbarani, 2008). ■

2.5 Ruang Metrik *Cone*

Konsep ruang metrik dapat diperluas dengan menggunakan sifat terurut parsial yang diterapkan pada P (*cone*), sehingga menjadi ruang metrik *cone*. Pada sub bab ini diberikan beberapa definisi mengenai ruang metrik *cone* yang meliputi kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik *cone* dan definisi dari ruang metrik *cone* yang lengkap. Diberikan pula contoh dari ruang metrik *cone*.

Analogi antara ruang metrik dan ruang metrik *cone* dapat dibentuk melalui definisi dari masing-masing ruang tersebut. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi mengenai ruang metrik *cone*.

Definisi 2.5.1

Misalkan $X \neq \emptyset$. Fungsi $d_c : X \times X \to E$ sehingga memenuhi

i. $0 \preccurlyeq d_c(x,y)$ untuk semua $x, y \in X$ dan $d_c(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. $d_c(x,y) = d_c(y,x)$ untuk semua $x, y \in X$,
iii. $d_c(x,y) \preccurlyeq d_c(x,z) + d_c(z,y)$ untuk semua $x, y, z \in X$

disebut metrik *cone* pada X dan (X, d_c) disebut ruang metrik *cone* (Guang dan Xian, 2007).

Selanjutnya, diberikan contoh dari ruang metrik *cone* dengan memilih kodomain $E = \mathbb{R}^2$.

Contoh 2.5.1

Diberikan $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x,y) \in E : x, y \geq 0\}$, dan $X = \mathbb{R}$. Fungsi $d_c : X \times X \to E$ yang didefinisikan sebagai $d_c(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$ dengan $\alpha \geq 0$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (X, d_c) adalah ruang metrik *cone*.

www.itk.ac.id

Bukti.

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$

www.itk.ac.id

(i) $d_c(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$, karena $|x-y| \geq 0$ dan $\alpha|x-y| \geq 0$ sehingga $d_c(x,y) - 0 \in P$ sama artinya dengan $0 \preccurlyeq d_c(x,y)$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $d_c(x,y) = 0$, maka $x = y$

$$\begin{aligned} d_c(x,y) &= 0, \\ (|x-y|, \alpha|x-y|) &= 0. \\ (|x-y|, \alpha|x-y|) &= (0,0). \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} |x-y| &= 0, \\ x-y &= 0, \\ x &= y, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \alpha|x-y| &= 0, \\ x-y &= 0, \\ x &= y. \end{aligned}$$

Kemudian, ditunjukkan bahwa $x = y$, maka $d_c(x,y) = 0$

$$\begin{aligned} d_c(x,y) &= (|x-y|, \alpha|x-y|), \\ &= (|x-x|, \alpha|x-x|), \\ &= (|0|, \alpha|0|), \\ &= (0,0), \\ d_c(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $d_c(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) Karena

$$\begin{aligned} |x-y| &= |-(y-x)| \\ &= |-1||y-x| \\ &= |y-x|, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} d_c(x,y) &= (|x-y|, \alpha|x-y|) \\ &= (|y-x|, \alpha|y-x|) \\ &= d_c(y,x) \end{aligned}$$

www.itk.ac.id

Sehingga terbukti bahwa $d_c(x,y) = d_c(y,x)$.

(iii) Dibuktikan bahwa $d_c(x,y) \preccurlyeq d_c(x,z) + d_c(z,y)$. Menurut definisi

$$d_c(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|),$$
$$d_c(x,z) = (|x-z|, \alpha|x-z|),$$
$$d_c(z,y) = (|z-y|, \alpha|z-y|),$$

maka

$$\begin{aligned} d_c(x,z) + d_c(z,y) &= (|x-z|, \alpha|x-z|) + (|z-y|, \alpha|z-y|) \\ &= (|x-z| + |z-y|, \alpha|x-z| + \alpha|z-y|) \\ &= (|x-z| + |z-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|)) \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} d_c(x,z) + d_c(z,y) - d_c(x,y) &= [|x-z| + |z-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|)] \\ &\quad -(|x-y|, \alpha|x-y|) \\ &= [|x-z| + |z-y| - |x-y|, \\ &\quad \alpha(|x-z| + |z-y|) - \alpha|x-y|] \\ &= [|x-z| + |z-y| - |x-y|, \\ &\quad \alpha(|x-z| + |z-y| - |x-y|)] \end{aligned}$$

Dibuktikan bahwa $(|x-z| + |z-y| - |x-y|) \geq 0$

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &= |(x-z) + (z-y)| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} |x-z| + |z-y| &\geq |x-y| \\ |x-z| + |z-y| - |x-y| &\geq 0 \end{aligned}$$

dan

$$\alpha(|x-z| + |z-y| - |x-y|) \geq 0$$

dengan $\alpha \geq 0$. Sehingga didapatkan bahwa

$$d_c(x,z) + d_c(z,y) - d_c(x,y) \in P.$$

Oleh karena itu, $d_c(x,y) \preccurlyeq d_c(x,z) + d_c(z,y)$. Jadi pasangan (X, d_c) adalah ruang metrik *cone* (Guang dan Xian, 2007). ■

Teorema titik tetap hanya dapat diterapkan pada ruang yang lengkap. Sehingga, perlu diberikan definisi untuk menyelidiki kelengkapan dari ruang metrik *cone*. Oleh karena itu, terlebih dahulu dijelaskan definisi barisan yang konvergen.

www.itk.ac.id
www.itk.ac.id

Definisi 2.5.2

Diberikan (X, d_c) adalah ruang metrik *cone* dengan $x \in X$ dan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$d_c(x_n, x) \ll c.$$

Dinotasikan dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$ dengan $n \to \infty$ (Guang dan Xian, 2007).

Selanjutnya, diberikan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik *cone*.

Definisi 2.5.3

Diberikan ruang metrik *cone* (X, d_c) dan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy pada X apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m > n_0$ berlaku (Guang dan Xian, 2007),

$$d_c(x_n, x_m) \ll c.$$

Adapun kelengkapan pada ruang metrik *cone* (X, d_c) dinyatakan seperti pada Definisi 2.5.4.

Definisi 2.5.4

Ruang metrik *cone* (X, d_c) disebut ruang metrik *cone* lengkap apabila setiap barisan Cauchy pada (X, d_c) merupakan barisan yang konvergen (Guang dan Xian, 2007).

2.6 Pemetaan Kontraktif

Pada sub bab ini diberikan definisi dan sifat-sifat mengenai pemetaan kontraktif. Pemetaan kontraktif dapat diterapkan di dalam ruang metrik. Definisi dari pemetaan kontraktif digunakan untuk mengkonstruksi pemetaan kontraktif quasi. Adapun tujuan dari penerapan pemetaan kontraktif di dalam ruang metrik, yaitu untuk menyelidiki eksistensi dan ketunggalan titik tetap di ruang metrik tersebut. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi mengenai pemetaan kontraktif, tetapi terlebih dahulu diberikan definisi dari pemetaan yang ditunjukan pada Definisi 2.6.1.

www.itk.ac.id

Definisi 2.6.1

Misalkan X dan Y adalah ruang metrik. Pemetaan f dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $f: X \to Y$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in X$ yang dikawankan secara tunggal dengan $y \in Y$ dan ditulis (Kreyszig, 1978),

$$y = f(x).$$

Selanjutnya, definisi dari pemetaan kontraktif pada ruang metrik ditunjukkan pada Definisi 2.6.2.

Definisi 2.6.2

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraktif, jika ada konstanta λ dengan $0 \leq \lambda < 1$, berlaku

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

untuk setiap $x, y \in X$ (Kreyszig, 1978).

2.7 Pemetaan Kontraktif Quasi

Salah satu perluasan dari pemetaan kontraktif adalah pemetaan kontraktif quasi. Ćirić (1974) mendefinisikan suatu pemetaan f pada ruang metrik X ke dalam dirinya sendiri menjadi suatu pemetaan kontraktif quasi. Adapun definisi dari pemetaan kontraktif quasi pada ruang metrik diberikan pada Definisi 2.7.1.

Definisi 2.7.1

Suatu pemetaan $f: X \to X$ dari ruang metrik X ke dalam dirinya sendiri dikatakan sebagai kontraktif quasi jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan λ, $0 \leq \lambda < 1$, sedemikian sehingga

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda \cdot \max\big\{d(x, y), d\big(x, f(x)\big), d\big(y, f(y)\big), d\big(x, f(y)\big), d(y, f(x))\big\}$$

untuk setiap $x, y \in X$ (Ćirić, 1974).

Pemetaan kontraktif quasi dapat pula diterapkan pada ruang metrik *cone*. Sehingga definisi bentuk pemetaan kontraktif quasi pada ruang metrik *cone* adalah sebagai berikut:

Definisi 2.7.2

Misalkan (X, d_c) adalah ruang metrik *cone*. Suatu pemetaan $f: X \to X$ sedemikian sehingga untuk beberapa nilai konstan $\lambda \in (0, 1)$ dan untuk setiap $x, y \in X$, terdapat (Ilić dan Rakočević, 2009),

$$u \in \mathrm{C}(f, x, y) \equiv \big\{d_c(x, y), d_c\big(x, f(x)\big), d_c(y, f(y)), d_c\big(x, f(y)\big), d_c(y, f(x))\big\},$$

sedemikian sehingga

www.itk.ac.id

$$d_c(f(x), f(y)) \preccurlyeq \lambda \cdot u,$$

disebut kontraktif quasi.

Jika $f: X \to X$ dan $n \in \mathbb{N}$, dapat didefinisikan

$$O(x; n) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\},$$

dan

$$O(x; \infty) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

2.8 Teorema Titik Tetap Banach

Teorema yang memenuhi kondisi pemetaan kontraktif disebut juga sebagai teorema titik tetap Banach. Pada sub bab ini diberikan beberapa teorema mengenai titik tetap Banach. Fungsi dari teorema titik tetap Banach adalah untuk menyelidiki keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada beberapa ruang metrik. Beberapa teorema mengenai titik tetap ditunjukkan pada Teorema 2.8.1 dan Teorema 2.8.2.

Teorema 2.8.1

Jika T adalah pemetaan kontraktif di ruang metrik X maka T kontinu di X.

Teorema 2.8.2

Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif, maka f memiliki titik tetap yang tunggal (Kreyszig, 1978).

2.9 Penelitian Terdahulu

Hasil penelitian terdahulu yang memiliki keterkaitan dengan penelitian yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Penelitian terdahulu

No	Nama dan Tahun Publikasi	Hasil
1	Long Guang Huang dan Xian Zhang, 2007	Hasil : Memperkenalkan ruang metrik *cone* dan membuktikan beberapa teori titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik *cone*.
2	Dejan Ilić dan Vladimir Rakočević, 2008	Hasil : Tujuan dari makalah ini adalah untuk menggeneralisasi dan menyatukan teorema titik tetap dari Das dan Naik, Ćirić, Jungck, Huang dan Zhang pada ruang metrik *cone* lengkap.

www.itk.ac.id

3	Dejan Ilić dan Vladimir Rakočević, 2009	Hasil : Membuktikan bahwa titik tetap untuk pemetaan kontraktif quasi pada ruang metrik *cone* ada dan tunggal.

www.itk.ac.id

Pada tugas akhir ini diselidiki mengenai keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik *cone* menggunakan teorema titik tetap pemetaan kontraktif quasi. Penelitian ini banyak merujuk pada penelitian Dejan Ilić dan Vladimir Rakočević tahun 2009 yang berjudul "*Quasi-Contraction on a Cone Metric Space*". Hal yang membedakan penelitian ini dengan penelitian Dejan Ilić dan Vladimir Rakočević pada tahun 2009 adalah pada pembuktian teorema titik tetap dan pemberian contoh yang terkait. Penelitian ini menjabarkan mengenai langkah-langkah pembuktian yang runtut, kemudian ditambahkan contoh dari ruang metrik *cone*, serta pemetaan kontraktif quasi.

www.itk.ac.id